

1.5 CÁLCULO DE LÍMITES APLICANDO PROPIEDADES

Hasta el momento se han calculado límites usando calculadoras y gráficas, pero dichos métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección se utilizarán las propiedades de los límites, para proponer un método preciso para calcularlos.

Propiedades de los límites

Si c es una constante y los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$. En palabras, el límite de una constante es igual a la constante.
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$. En palabras, el límite de una variable que tiende a a es a .
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. En palabras, el límite de una suma es igual a la suma de los límites.
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. En palabras, el límite de una resta es igual a la resta de los límites.
5. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. En palabras, el límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.
6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. En palabras, el límite de un producto es igual al producto de los límites.
7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$. En palabras, el límite de un cociente es igual al cociente de los límites.
8. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. En palabras, el límite de una potencia es igual a la potencia calculada en a .
9. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. En palabras, el límite de la potencia de una función es igual a la potencia del límite de la función.
10. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (si n es par, entonces, $a > 0$). En palabras, el límite de una raíz es igual a la raíz calculada en a .
11. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (si n es par, entonces, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$). En palabras, el límite de la raíz enésima de una función es igual a la raíz enésima del límite de la función.

Unicidad del límite

Si el límite de una función existe, entonces es único.

Es decir, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$$

se dice que $L_1 = L_2$

Principio de sustitución

Se sabe que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a no depende de f . Para algunas funciones este límite es precisamente $f(a)$.

Esta afirmación permite concluir que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ para algunas funciones.}$$

Este método para calcular el límite de una función es llamado método de **sustitución directa**.

Ejemplos

1. Calcular los siguientes límites aplicando propiedades.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 5)$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 3x + 2)$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (5x^2 + 2x + 9)$

d. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 5x - 3}$

Solución

Usando las propiedades de los límites y el principio de sustitución, se pueden calcular los límites propuestos. Así,

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - 5) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (5x^2 + 2x + 9) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 5x^2 + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 2x + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 9 = 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 9$
 $= \frac{5}{9} + \frac{2}{3} + 9.$

Luego, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} (5x^2 + 2x + 9) = \frac{92}{9}$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow 3} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 3x + \lim_{x \rightarrow 3} 2 = 4(3)^2 - 3(3) + 2$
 $= 36 - 9 + 2.$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 3x + 2) = 29$

d. $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 5x - 3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 5x - 3)} =$
 $\sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 5x - \lim_{x \rightarrow -1} 3} = \sqrt{(-1)^2 - 5(-1) - 3}$
 $= \sqrt{1 + 5 - 3} = \sqrt{3}.$

Luego, $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 5x - 3} = \sqrt{3}$

2. Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$, probar que

a. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 15$

b. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3a^2 - 2a + 7$

Solución

a. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 2x + \lim_{x \rightarrow 2} 7$
 $= 12 - 4 + 7 = 15.$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 15$

b. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x \rightarrow a} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow a} 2x + \lim_{x \rightarrow a} 7$
 $= 3a^2 - 2a + 7$

3. Usar el principio de sustitución directa para calcular los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1}$

Solución

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0^2 - 1}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{x^3 + 1} = \frac{(2)^2 - 2 + 3}{(2)^3 + 1} = \frac{4 - 2 + 3}{8 + 1} = \frac{5}{9}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(1)^3 - 1}{(1)^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$

d. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1}{2\left(\frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{\frac{1}{4} + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{\frac{9}{4}}{2} = \frac{9}{8}$

También se puede calcular el límite de la potencia de una función, cuando la potencia es otra función, por el principio de sustitución. Así,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Ejemplo

Calcular el límite de la función $f(x)$ dada

a. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)^x$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} (5x - 4)^{-x}$

Solución

a. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)^x = \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)^{\lim_{x \rightarrow 2} x} = [3(2) + 1]^2 = (6 + 1)^2 = 7^2 = 49$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} (5x - 4)^{-x} = \lim_{x \rightarrow -1} (5x - 4)^{\lim_{x \rightarrow -1} -x} = [5(-1) - 4]^{-(-1)} = (-5 - 4)^1 = (-9)^1 = -9$



Práctica 2

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Determinar para cada función los límites laterales indicados.

a. $f(x) = 3x + 8$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

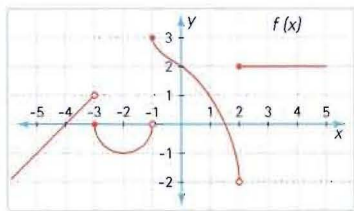
b. $g(x) = \sqrt{x}$ $\lim_{x \rightarrow 9^-} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow 9^+} g(x)$

c. $h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

d. $i(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x > 2 \\ x^2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} i(x)$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} i(x)$

e. $j(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} j(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} j(x)$

2. Determinar el valor de cada límite a partir de la gráfica de $f(x)$.



- a. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ f. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ g. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$
 c. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ h. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
 d. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ i. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
 e. $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ j. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
3. Calcular el valor de los siguientes límites usando las propiedades.

- a. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+3}$ g. $\lim_{x \rightarrow 3} 4x^2 - \frac{1}{x}$
 b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+8)}{x}$ h. $\lim_{x \rightarrow 6} (x+1)^2$
 c. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+4}{x-2}$ i. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \sqrt{x+2}$
 d. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x} + x$ j. $\lim_{x \rightarrow 1} x^5 - 2x - 6$
 e. $\lim_{x \rightarrow 6} x^2 - 3x$ k. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\frac{4x-5}{x-1}}$
 f. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 4 \sin x$ l. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 5}{x-1}$

- m. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+14}}{2x}$ o. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x-6}{x}$
 n. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+3}$ p. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x-3}{x+2}$

4. Determinar si el valor del límite de la función dada es correcto. Justificar la respuesta.

- a. $\lim_{x \rightarrow 1} 4x - 2 = 2$ h. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x}{3-x} = 0$
 b. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 3} = -1$ i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{x-2} = 1$
 c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4}{x-3} = 4$ j. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 3x^2}{4} = \frac{1}{4}$
 d. $\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)^x = 4^x$ k. $\lim_{x \rightarrow 1} (9+x)^{3x-1} = 100$
 e. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^3 + 4}{x-1} = \frac{1}{3}$ l. $\lim_{x \rightarrow -2} (5x+4)^x = \frac{1}{36}$
 f. $\lim_{x \rightarrow 5} x - \frac{2}{x} = \frac{23}{5}$ m. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 3x}{x} = 8$
 g. $\lim_{x \rightarrow 4} |x-2| = -2$ n. $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 2x} = 0$

5. Determinar si el límite planteado para cada función existe. Justificar la respuesta.

- a. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 b. $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
 c. $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1 \\ x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

1.6 LÍMITES DE FUNCIONES INDETERMINADAS

En algunas ocasiones, al efectuar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado puede ser una indeterminación.

Cuando el resultado es $\frac{L}{0}$, entonces se calcula el límite a partir de los límites

laterales. Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$.

Como el resultado después de la sustitución es una indeterminación, entonces, para calcular el valor del límite, se calculan los límites laterales. Así,

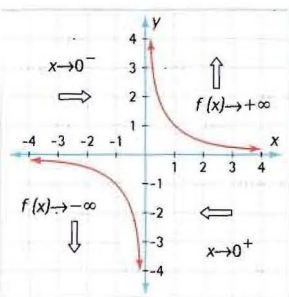


Figura 4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Como los límites laterales son distintos, entonces, el límite no existe. Así,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se muestra en la figura 4.

Límites de funciones racionales

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado n y m , respectivamente, y

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$, la indeterminación se evita factorizando el nume-

rador $P(x)$ o el denominador $Q(x)$, de modo que el binomio $(x - a)$

se simplifique así: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a) P_1(x)}{(x - a) Q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

g. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$

h. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1}$

Solución

a. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = 12$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 2)(x - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - (x + 2)}{2(x + 2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - x - 2}{2(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(x + 2)}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x + 2)} = \frac{-1}{2(0 + 2)} = -\frac{1}{4}$

En la notación

$f: A \rightarrow B$

A es el dominio y

B es el codominio

$$\begin{aligned} \text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 - (x+4)}{4(x+4)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x - 4}{4(x+4)x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{4x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4(x+4)} = \frac{-1}{4(0+4)} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$\text{g. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-5)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-5) = -7$$

$$\text{h. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$$

Límite de funciones radicales

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones radicales y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces, la indeterminación se elimina racionalizando el numerador, racionalizando el denominador o racionalizándolos ambos.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\sqrt{5 - x^2} - 2}$$

Solución

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - 4}{(x - 3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\sqrt{5 - x^2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(\sqrt{5 - x^2} + 2)}{(\sqrt{5 - x^2} - 2)(\sqrt{5 - x^2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(\sqrt{5 - x^2} + 2)}{5 - x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(\sqrt{5 - x^2} + 2)}{1 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(\sqrt{5 - x^2} + 2)}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x^2} + 2}{1 + x} = \frac{4}{2} = 2$$

Práctica 3

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Encontrar los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 3}{x + 1}$$

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 9}$$

$$\text{g. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{8x^2 + 8x}{5 - x}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{(x - 3)^2}$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{2(x + 2)}$$

$$\text{f. } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 8x + 15}{4 + x}$$

$$\text{h. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

2. Calcular, si existe, el valor de cada límite.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

h. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

c. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16} \cdot \frac{1}{x + 5} - \frac{1}{5}$

j. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^5}{x^5 - 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

k. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^4 - 16}$

e. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$

l. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - x - 2}$

f. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$

m. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{2x - 1}$

g. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

n. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^4 - a^4}{x}$

3. Hallar el límite de cada función, racionalizando el denominador o el numerador según corresponda.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{16 - x}}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2}}{x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}$

4. Indicar en cada proceso de solución si existe algún error. Justificar la respuesta.

a. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} \cdot \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(4 - x)(2 + \sqrt{x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{0}{2 + \sqrt{x}} = \frac{0}{2 + \sqrt{4}} = \frac{0}{2 + 2} = \frac{0}{4} = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x - 1}}{x - 2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x - 1}}{x - 2} \cdot \frac{1 + \sqrt{x - 1}}{1 + \sqrt{x - 1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (x - 1)}{(x - 2)(1 + \sqrt{x - 1})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{(x - 2)(1 + \sqrt{x - 1})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 + \sqrt{x - 1}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2 - 1}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

1.7 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los límites de las seis funciones trigonométricas se pueden calcular mediante sustitución directa. Así,

• $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

• $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

• $\lim_{x \rightarrow a} \sec x = \sec a$

• $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

• $\lim_{x \rightarrow a} \csc x = \csc a$

• $\lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$

Ejemplo

Calcular el límite de $f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$ cuando x tiende a 0.

Solución

Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

Luego, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$

Límites trigonométricos especiales

Para calcular algunos límites de funciones trigonométricas, para los cuales se cumple que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, se tienen las siguientes propiedades.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0, \text{ con } t = t(x).$$

Ejemplo

Calcular los siguientes límites trigonométricos.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

e. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x}$

g. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x}$

h. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\tan x}$

Solución

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}$
 $= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 2 \times 1 \times 1 = 2$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \times 0 = 0$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 2x \cdot \sin 3x}{3 \cdot 2x \cdot \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x \cdot 2x}{2 \cdot 3x \cdot \sin 2x}$
 $= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x}$
 $= \frac{3}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2}$

e. Sea $u = x + 1$, entonces $x = u - 1$, de donde $x \rightarrow -1 \Rightarrow u - 1 \rightarrow -1 \Rightarrow u \rightarrow 0$.

Así, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

$$f. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \\ = 2 \times 0 = 0$$

$$g. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x (\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\sin x - \cos x)}{\cos x (\sin x - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x} \\ = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$h. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{0}{1}$$

Luego, cuando un límite es de la forma $\frac{0}{k}$ se dice que el límite es igual a cero.

1.8 LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO

Límites infinitos

Cota: un número que es mayor o menor que todos los elementos de un conjunto dado.

Si una función $f(x)$ crece o decrece sin cota cuando x tiende a un valor a , entonces, se dice que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.

Para notar que el límite de una función $f(x)$ crece sin cota, cuando x tiende a a , se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

De igual manera, si el límite de una función $f(x)$ decrece sin cota, cuando x tiende a a , se escribe:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Ejemplo

Elaborar una tabla de valores e indicar si el límite de la función $f(x)$ crece o decrece sin cota.

$$a. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$$

Solución

a. La tabla muestra los valores de $f(x)$ cuando x tiende a 3^+ .

x	3,1	3,01	3,001	3,0001	3
$f(x)$	10	100	1.000	10.000	$+\infty$

La gráfica del límite de la función $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ cuando x tiende a 3 por la derecha, se muestra en la figura 5.

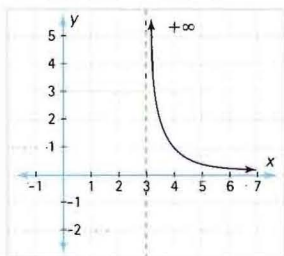


Figura 5

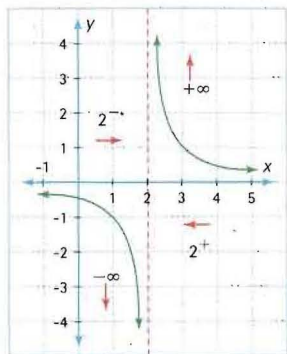


Figura 6

Luego, el límite de la función $f(x) = \frac{1}{x-3}$ crece sin cota.

b. La tabla muestra los valores de $f(x)$ cuando x tiende a 2.

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	-2,564	-25,06	-250,06	?	249,93	24,937	2,439

Luego, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$ no existe, pues $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = \infty$

La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura 6.

Límites en el infinito

En los límites infinitos se presenta un caso especial, en el cual la función $f(x)$ crece o decrece sin cota.

Otro caso especial en el estudio de los límites se presenta cuando la variable x crece o decrece sin cota. Teniendo en cuenta estas variaciones, se pueden plantear los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Estos límites se llaman *límites en el infinito*.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, entonces se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a infinito.

De la misma manera, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, entonces, se dice que el límite de la función $f(x)$ es L cuando x tiende a menos infinito.

Cuando se calculan límites en el infinito se presentan dos casos:

- **Caso 1.** Límites de la forma $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ siempre y cuando x^n esté definido.

Estos límites pueden comprobarse asignando a x valores numéricos cada vez mayores y, calculando el cociente respectivo.

Por ejemplo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$

Cuando x toma valores cada vez mayores, la función $f(x)$ se aproxima cada vez más a 0 por la derecha.

Cuando x toma valores cada vez menores, la función $f(x)$ se aproxima también a 0, por la izquierda.

La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se puede apreciar en la figura 7.

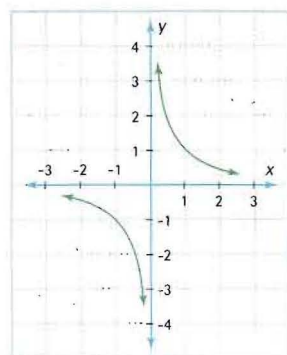


Figura 7

- **Caso 2.** Límites en el infinito de una función racional.

Los límites de funciones racionales para los cuales se presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ reciben el nombre de *límites en el infinito*.

Para calcular el límite de estas funciones, se divide el numerador y el denominador de la función entre la potencia de mayor grado.

A partir de este proceso se presentan tres casos:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \infty$ si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{m}{n}$ si el grado de $P(x)$ es igual al grado de $Q(x)$, siendo m y n los coeficientes de los términos de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.

Ejemplo

Calcular el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x+3}$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-8}{x^2-1}$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5-4x^3+1}{-3x^2+4x^5}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x^2+5x-8}{x^4-1}$

e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4x-1}{\sqrt{x^4+1}}$

Solución

- a. Se divide el numerador y el denominador entre la potencia de mayor grado; en este caso, se divide entre x . Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

- b. En este caso, la potencia de mayor grado es x^2 ; luego, se divide el numerador y el denominador entre x^2 . Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-8}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x^2} - \frac{8}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0-0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

- c. Se divide el numerador y el denominador entre la potencia de mayor grado. En este caso, se divide entre x^5 . Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5-4x^3+1}{-3x^2+4x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^5}{x^5} - \frac{4x^3}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{-3x^2}{x^5} + \frac{4x^5}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^5}}{-\frac{3}{x^3} + 4} = \frac{5}{4}$$

- d. En este caso, la potencia de mayor grado es x^4 ; luego se divide el numerador y el denominador entre x^4 . Así,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-3x^2+5x-8}{x^4-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{5x}{x^4} - \frac{8}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{1}{x^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{8}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^4}} = \frac{0 - 0 + 0 - 0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

- e. Dividiendo el numerador y el denominador entre x^2 que es la potencia de mayor grado, se obtiene.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 1}{\sqrt{x^4 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} \\ &= \frac{3 + 0 - 0}{\sqrt{1 + 0}} = 3 \end{aligned}$$

La indeterminación $\infty - \infty$ se resuelve efectuando la resta de funciones. Cuando aparecen radicales, se multiplica y se divide por la expresión conjugada.

Ejemplo

Calcular el límite.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3})$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1})$

Solución

- a. Al efectuar la sustitución, resulta

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}) = \infty - \sqrt{\infty^2 + 3} = \infty - \sqrt{\infty} = \infty - \infty. \text{ Luego,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 3})(x + \sqrt{x^2 + 3})}{(x + \sqrt{x^2 + 3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 + 3)}{(x + \sqrt{x^2 + 3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 3}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x + \sqrt{x^2 + 3}}$$

Dividiendo el numerador y el denominador entre x , resulta.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-3}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} = \frac{0}{1 + \sqrt{1 + 0}} = \frac{0}{2} = 0$$

b. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x^4 - 1})(x^2 + \sqrt{x^4 - 1})}{(x^2 + \sqrt{x^4 - 1})}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - (x^4 - 1)}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^4 + 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \sqrt{\frac{x^4}{x^4} - \frac{1}{x^4}}} = \frac{0}{1 + \sqrt{1 - 0}} = \frac{0}{2} = 0$$

Práctica 4

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Calcular los siguientes límites.

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ g. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cot x}$
 b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{3x}$ h. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x}$
 c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 7x}{x}$ i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 5x}{\sen 4x}$
 d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{10x}$ j. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{4x}$
 e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sen^2 3x}{2x^2}$ k. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sen 4x}$
 f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sen 2x}$ l. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3x}$

2. Completar la tabla de valores. Luego, determinar si el límite de la función crece o decrece sin cota.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 - 2x}$

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0
f(x)						

b. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
f(x)							

c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x - 1}$

x	0,89	0,9	0,99	0,999	0,9999	1
f(x)						

d. $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{3 + x}{x - 5}$

x	4,89	4,9	4,99	4,999	4,9999	5
f(x)						

3. Calcular el valor de los siguientes límites.

- a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^3 + 3x^2 + 1}$ e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$
 b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x + 1}{4x^4 + 8x^2 + 1}$ f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x - 1}}$
 c. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{4x^2 - 1}$ g. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 6}{x^3 - 2x + 5}$
 d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 2x^3 - 2}{3x^4 - 5x^2}$ h. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 4x^2 + x}{x^2 + 3x^3}$

i. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 2}}$

j. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x - 1}}$

k. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 3}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

l. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + 8}}{\sqrt{x^2 + 3}}$

m. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 3x + 4}{1 + 2x^2}$

n. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 5}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}$

o. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 2}{\sqrt{3x + 2}}$

4. Indicar si el límite ha sido calculado correctamente. Justificar la respuesta.

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = 0$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 1} = 1$

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - \sqrt{x + 1} = 2$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x + 2} = 0$

e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \sqrt{x - 1} = 0$

5. Probar cada límite teniendo en cuenta las condiciones dadas.

a. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x - 2} = 2$

demostrando que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $N > 0$ tal que $\left| \frac{2x + 1}{x - 2} - 2 \right| < \epsilon$ siempre que $x > N$.

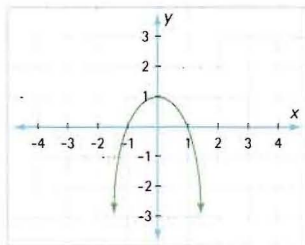
b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{x - 1} = 4$

demostrando que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $N < 0$ tal que $\left| \frac{4x + 1}{x - 1} - 4 \right| < \epsilon$ siempre que $x < N$.

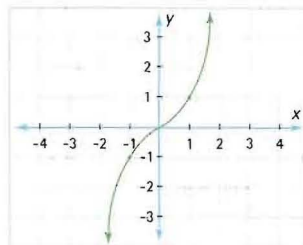
2.1 FUNCIONES CONTINUAS

Una función es **continua** cuando a pequeñas variaciones de la variable independiente corresponden pequeñas variaciones de la variable dependiente.

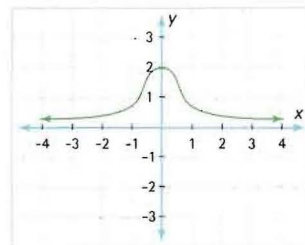
Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se presentan a continuación, son funciones continuas.



$$f(x) = -x^2 + 1$$



$$f(x) = x^3$$



$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Casi siempre, al operar con funciones continuas, se obtienen funciones que también son continuas.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas, entonces también son continuas las siguientes funciones:

$$f(x) \pm g(x); f(x) \cdot g(x); \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } g(x) \neq 0 \text{ y } kf(x) \text{ si } k \in \mathbb{R}.$$

- Si $y = f(x)$ es continua y si $g(y)$ es continua, entonces, la composición $g(f(x))$ es continua.
- Las funciones trigonométricas $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$, son continuas en sus respectivos dominios de definición.
- Las funciones $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son continuas en todo \mathbb{R} .
- Un polinomio es una función continua en todo número real a .
- Una función racional es continua en todos los números reales de su dominio.

2.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función f es continua en un punto $x = a$ si cumple las siguientes condiciones.

- f está definida en un intervalo abierto que contiene a a ; es decir, $f(a)$ existe.
- El límite de la función cuando x tiende a a existe; es decir, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
- El límite de la función cuando x tiende a a es igual a la función calculada en a ; es decir, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ejemplo

Determinar si la función $f(x) = x^2 + 4$ es continua en el punto $x = 1$.

Solución

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$ si cumple las tres condiciones dadas. Así,

1º Se verifica si $f(1)$ existe.

Si $f(x) = x^2 + 4$, entonces, $f(1) = 1^2 + 4 = 5$. Luego, $f(1)$ existe.

2º Se verifica si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe.

Si $f(x) = x^2 + 4$, entonces, $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 4 = 1^2 + 4 = 5$. Luego, $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 4$ existe.

3º Se verifica si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

A partir de 1º y 2º, se puede concluir que $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 4 = f(1) = 5$.

En conclusión, la función $f(x) = x^2 + 4$ es continua en $x = 1$.

La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura 1.

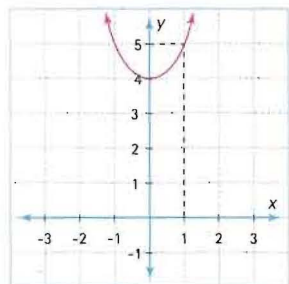


Figura 1

Si f **no es continua** en $x = a$, entonces, se dice que f es **discontinua** en $x = a$ o que tiene una discontinuidad en $x = a$.

Ejemplo

Determinar si la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$.

Solución

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$ si cumple las tres condiciones dadas. Así,

1º Se verifica si $f(1)$ existe.

Si $f(x) = 2x + 1$, entonces $f(1) = 2(1) + 1 = 3$.

Luego, $f(1)$ existe.

2º Se verifica si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe.

Como la función está definida a trozos, para calcular el límite se calculan los límites laterales. Así,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 1 = 3 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1$$

Como los límites laterales son distintos, entonces, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ no existe.

En conclusión, como no se verifica la segunda condición de continuidad, entonces, la función $f(x)$ es discontinua en $x = 1$.

La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura 2.

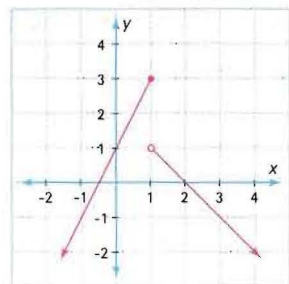


Figura 2

2.3 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Una función f es continua en un intervalo abierto (a, b) , si f es continua en todos los puntos del intervalo (a, b) .

Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si:

a. f es continua en el intervalo abierto (a, b) .

b. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Ejemplo

Analizar la continuidad de cada función en el intervalo indicado.

$$a. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

en el intervalo $(-3, 3)$

$$b. g(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

en el intervalo $[-2, 2]$

Solución

- a. Como la función está definida de dos formas en el intervalo $(-3, 3)$, se escoge comprobar la continuidad en el punto $x = 2$.

1º. Se verifica si $f(2)$ existe.

Como $f(2) = 4$, entonces $f(2)$ existe.

2º. Se verifica si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe.

Como la función está definida a trozos, para calcular el límite se calculan los límites laterales. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 = 4 \end{aligned}$$

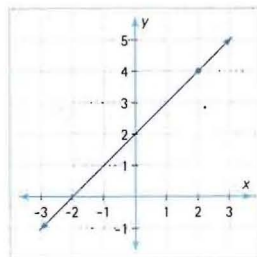
Como los límites laterales son iguales, entonces, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe.

3º. Se verifica si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

A partir de 1º y 2º, se puede concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = f(2) = 4$$

En conclusión, la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es continua en $x = 2$, y es continua en el intervalo $(-3, 3)$.



- b. Como la función está definida de tres formas en el intervalo $[-2, 2]$, se escoge el punto $x = 0$ para comprobar la continuidad.

1º. Se verifica si $g(0)$ existe.

Como $g(0) = 0$, entonces, $g(0)$ existe.

2º. Se verifica si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe.

Como la función está definida a trozos, se calculan los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

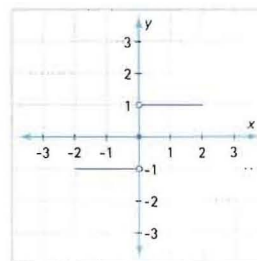
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Como los límites laterales son distintos, entonces

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ no existe.

En conclusión, como no se verifica la segunda condición de continuidad, entonces la función $g(x)$ es discontinua en $x = 0$.

La gráfica muestra la función $g(x)$ discontinua en el punto $x = 0$.



1. Determinar si cada función es continua en el punto dado.

a. $f(x) = x^3$ en $x = 0$

b. $f(x) = x + 3$ en $x = 1$

c. $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$

d. $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x > 3 \\ 5 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

e. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en $x = 1$

f. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x > 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$ en $x = 2$

g. $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$

h. $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 8x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$ en $x = 2$

2. Determinar si cada función es continua en el intervalo indicado. Luego, dibujar la gráfica correspondiente.

a. $f(x) = 3x + 4$ en el intervalo $[-1, 1]$

b. $f(x) = 3x^2$ en el intervalo $[1, 2]$

c. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x > 1 \\ x - 1 & \text{si } x = 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en el intervalo $(0, 2)$

d. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en el intervalo $[-1, 1]$

e. $f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{si } x = 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en el intervalo $(0, 2)$

f. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ en el intervalo $(1, 4)$

3. Hallar valores a y b para que cada función, sea continua en \mathbb{R} .

a. $f(x) = \begin{cases} a^2 x & \text{si } x < 1 \\ 3ax - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 2 \\ -5x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x > 0 \\ a^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} bx + 2 & \text{si } x < 2 \\ bx^2 - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

4. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 0 \\ |x - 2| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

¿La función $f(g(x))$ es continua en $x = 0$?

¿La función $g(f(x))$ es continua en $x = 0$?

Justificar las respuestas.

5. Completar la definición de cada función a trozos para que las funciones sean continuas en todo \mathbb{R} .

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \\ \square & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ \square & \text{si } x = 1 \\ \square & \text{si } x < 1 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ \square & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ \square & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ \square & \text{si } x = 3 \\ \square & \text{si } x > 3 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ \square & \text{si } x < 1 \end{cases}$

g. $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x > 2 \\ \square & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$

h. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ \square & \text{si } x = 1 \\ \square & \text{si } x > 1 \end{cases}$

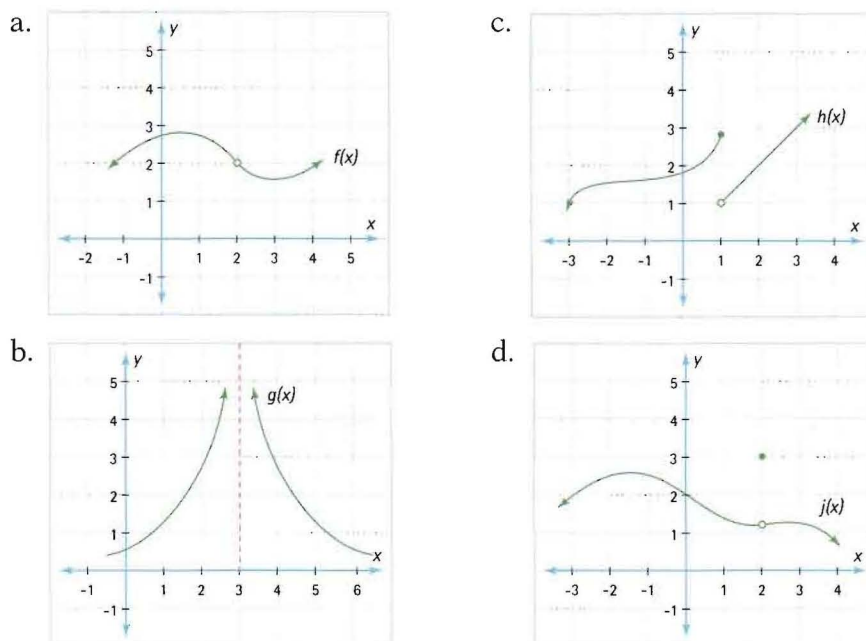
i. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < -1 \\ \square & \text{si } x = -1 \\ \square & \text{si } x > -1 \end{cases}$

j. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \neq 3 \\ \square & \text{si } x = 3 \end{cases}$

2.4 DISCONTINUIDADES

Una función **no es continua** o simplemente es **discontinua** cuando no se verifica alguna de las condiciones establecidas para ser continua.

Las siguientes gráficas corresponden a funciones discontinuas en un punto.



La función f cuya gráfica se ilustra en el literal a, no es continua porque no está definida en $x = 2$.

Las funciones $g(x)$ y $h(x)$ cuyas gráficas se ilustran en los literales b y c, son discontinuas en $x = 3$ y en $x = 1$, respectivamente, porque $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ no existen.

La función $j(x)$ cuya gráfica se ilustra en el literal d, muestra que $j(2)$ existe y $\lim_{x \rightarrow 2} j(x)$ existe, pero $\lim_{x \rightarrow 2} j(x) \neq j(2)$.

Por lo tanto, $j(x)$ es discontinua en $x = 2$.

Discontinuidades evitables

Una función f es **discontinua evitable** si sucede alguna de las siguientes condiciones:

a. No existe $f(a)$, si $x = a$.

b. Existen $f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ pero no coinciden.

Para que una función discontinua, que cumple con alguna de las condiciones anteriores, se pueda convertir en función continua, se efectúa una redefinición de la función original, definiendo a f para a de tal forma que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ejemplo

Determinar si la discontinuidad de las siguientes funciones es evitable. En caso de serlo, redefinir la función para que sea continua.

a. $f(x) = \frac{x^2 - 25}{3x - 15}$

b. $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{si } x \neq -1 \\ 3, & \text{si } x = -1 \end{cases}$

Solución

a. La función $f(x) = \frac{x^2 - 25}{3x - 15}$ es discontinua en el punto $x = 5$.

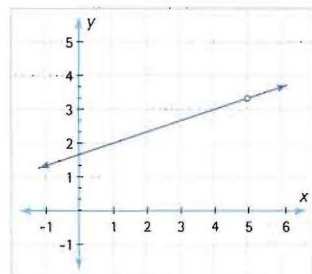
Al factorizarla, se observa que su gráfica coincide con la gráfica de la función $y = \frac{x + 5}{3}$, salvo en el punto $x = 5$. Luego, no existe $f(a)$ si $x = a$.

Así, se dice que la discontinuidad es evitable.

Entonces, se puede definir la función nuevamente, de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{3x - 15}, & \text{si } x \neq 5 \\ \frac{10}{3}, & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

La función $f(x)$ así definida es una función continua.



b. La función $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{si } x \neq -1 \\ 3, & \text{si } x = -1 \end{cases}$

es discontinua en $x = -1$, pues existe $g(-1) = 3$ y, además,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} x - 1 = -2; \text{ y}$$

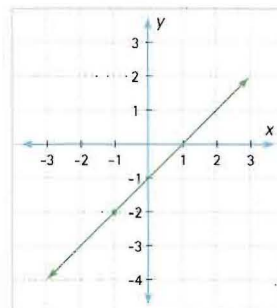
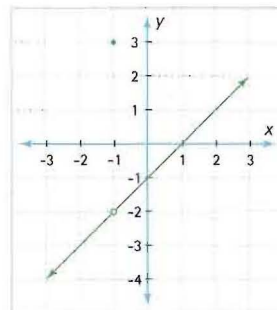
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - 1 = -2.$$

Como $g(-1) \neq \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$, la función es discontinua evitable.

Entonces se puede definir la función nuevamente, de la siguiente manera.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

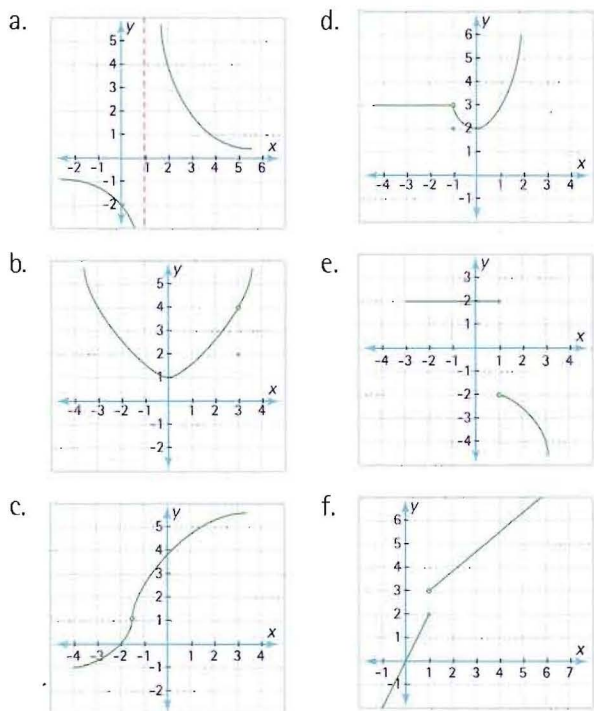
La función $g(x)$ así definida es una función continua. En la gráfica se muestra la función $g(x)$.



Práctica 8

● INTERPRETATIVA ● PROPOSITIVA ● ARGUMENTATIVA

1. Observar las gráficas y determinar en cada caso si la discontinuidad de la función es evitable o no. Justificar la respuesta.



2. Determinar el punto en el cual la función es discontinua. Luego, redefinir la función para que sea continua.

a. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

b. $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$

c. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{si } x \neq 4 \\ 2 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

d. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

e. $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

f. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 1 & \text{si } x = 5 \end{cases}$

3. Determinar si la función que se encuentra frente a cada función, la redefine correctamente. Explicar por qué.

a. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 2 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

e. $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

4. Definir una función para cada grupo de condiciones.

- a. $f(x)$ es discontinua en $x = 1$, $f(1)$ existe, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe.
- b. $f(x)$ es discontinua en $x = -2$, $f(-2)$ no existe, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ existe.
- c. $f(x)$ es discontinua en $x = 0$, $f(0)$ existe, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe, $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- d. $f(x)$ es discontinua en $x = 2$, $f(2)$ existe, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe.

5. Graficar cada función. Luego, indicar si su discontinuidad es evitable o no.

a. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

b. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

c. $f(x) = \frac{1}{x - 4}$

d. $f(x) = \frac{2}{2x - 3}$

e. $f(x) = \frac{5x + 10}{x + 2}$

f. $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$

g. $f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

h. $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

i. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$

j. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Discontinuidades no evitables o esenciales

Una función f es **discontinua no evitable o esencial** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe.

Este tipo de discontinuidades se presentan a partir de dos casos:

- Alguno de los límites laterales no existe.
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Ejemplos

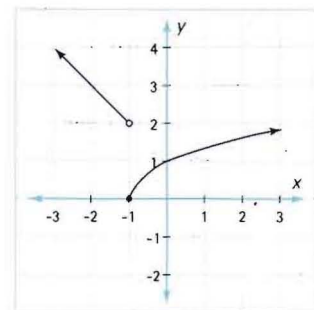
1. Trazar la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ para mostrar que $f(x)$ posee una discontinuidad no evitable.

Solución

La gráfica de la función $f(x)$ muestra claramente que los límites laterales existen pero no coinciden. Es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x + 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x + 1} = 0 \end{aligned}$$

Luego, la función f posee una discontinuidad no evitable.



2. Utilizar la gráfica de la función $g(x)$ para determinar el valor de x donde dicha función es discontinua. Indicar si la función $g(x)$ posee discontinuidad no evitable.

Solución

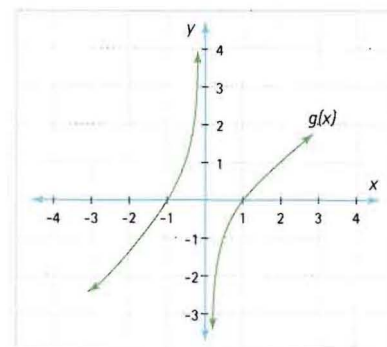
La gráfica de la función $g(x)$ muestra claramente que los límites laterales no existen, pues

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \infty$$

mientras que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

Luego, la función $g(x)$ es discontinua en $x = 0$ y posee una discontinuidad no evitable o esencial.



Dada una función, es posible hallar los intervalos de continuidad, determinando el valor o los valores de x donde dicha función es discontinua.

Ejemplos

1. Hallar los intervalos de continuidad en cada función. Luego, trazar la gráfica correspondiente.

a. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

b. $g(x) = x\sqrt{x+3}$

Solución

- a. Al factorizar el denominador de la función

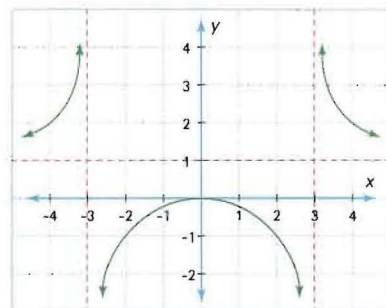
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$$

se observa que $f(x)$ no está definida en los valores de x donde dicho denominador es cero. Es decir

$$x_1 = -3 \text{ y } x_2 = 3$$

Luego, la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

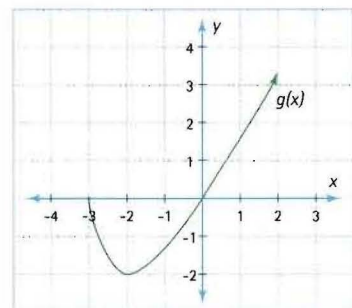
En la gráfica se muestra la función f .



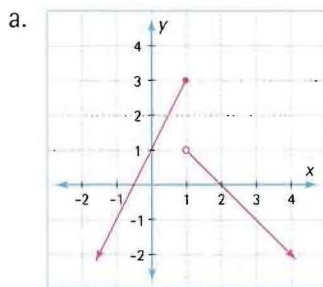
- b. La función $g(x) = x\sqrt{x+3}$ no está definida para valores de x menores que -3 .

Es decir, la función $g(x) = x\sqrt{x+3}$ es continua en $[-3, \infty)$.

Esta es la gráfica de la función g .



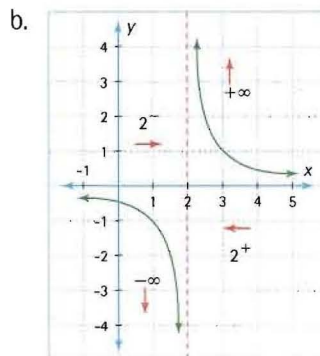
2. Determinar los intervalos de continuidad de cada función.



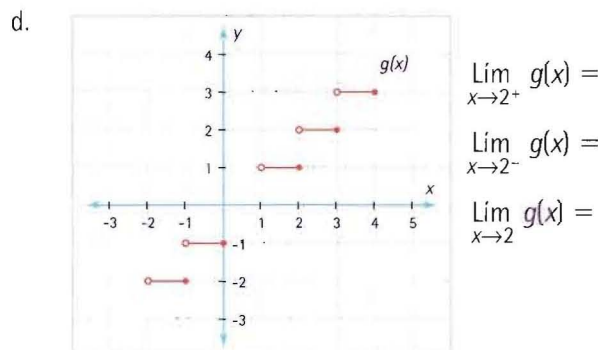
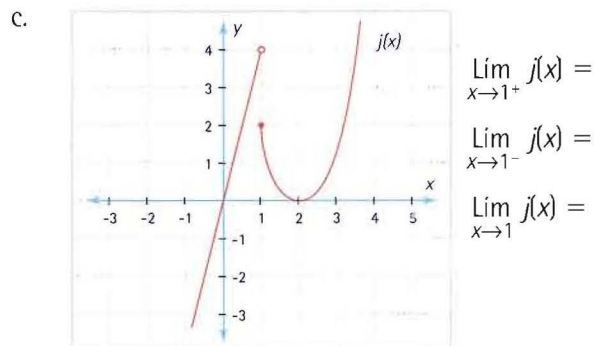
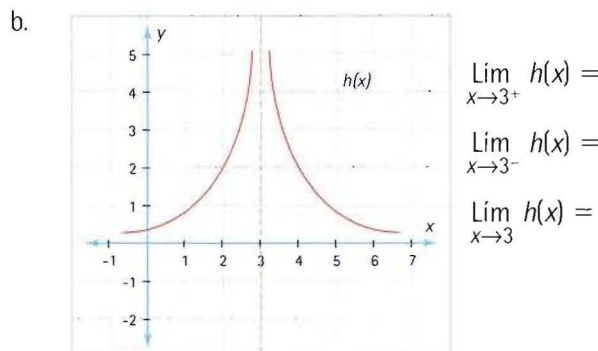
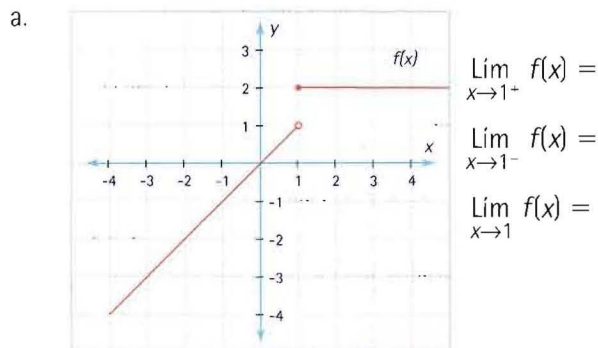
Solución

- a. Los intervalos de continuidad son $(-\infty, 1]$ y $(1, -\infty)$

- b. Los intervalos de continuidad son $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$



1. Hallar los límites que se indican para cada función.



2. Trazar la gráfica de cada función e indicar el punto donde tiene una discontinuidad esencial.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x < -3 \\ 2x + 4, & \text{si } -3 < x < 0 \\ 5x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } 1 \leq x < 5 \\ 2, & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 2x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

3. Determinar el valor de verdad de cada afirmación. Justificar la respuesta.

a. La función $f(x) = \frac{4x-1}{x-2}$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b. La función $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

c. La función $h(x) = \sqrt{9-x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 3]$.

d. La función $i(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$ es continua en los intervalos $(-\infty, -3]$, $[3, 4)$ y $(4, \infty)$.

e. La función $j(x) = [x]$ es discontinua en el intervalo $[-1, 3]$.

4. Hallar los intervalos en los cuales cada una de las siguientes funciones es continua.

a. $f(x) = x^4 - \sqrt[3]{x} + 2$ e. $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x + 12}$

b. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ f. $f(x) = \frac{3x + 1}{3x}$

c. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ g. $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$

d. $f(x) = \frac{x}{x^3 - x - 12}$ h. $f(x) = \frac{9x-2}{x^3-1}$